Université Sultan Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique

ALGÈBRE III
Support de cours

Prof. Nihale EL BOUKHARI

Filière SMIA - S2
Année universitaire : 2022 - 2023

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble muni de deux lois de composition :*
– *Une loi interne, notée $+$;*
– *Une loi externe, donnée par*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

On dit que $(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** *si :*
– *$(E, +)$ est un groupe abélien ;*
– *$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(x, y) \in E^2$, on a*
  i. $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  ii. $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  iii. $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
  iv. $1_{\mathbb{K}}.x = x$

Remarque 1.1.2. *Les éléments de E sont appelés des* **vecteurs***, et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des* **scalaires**.

Exemples 1.1.3.

1. *Le corps $(\mathbb{K}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien, et pour tous $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{K}$, les conditions i., ii., iii., et iv. sont vérifiées.*
2. *$(\mathbb{C}, +, .)$ est aussi bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet, la définition 1.1.1 reste vérifiée pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
3. *Soit $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, qu'on munit de la loi interne $(P, Q) \mapsto P + Q$, et de la loi externe $(\lambda, P) \mapsto \lambda.P$. Alors $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
4. *On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des lois suivantes :*

- $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \lambda.u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Plus généralement, soit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble des suites à valeurs dans* $\mathbb{K}$*, alors* $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

5. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* X *un ensemble non-vide. On note* $\mathcal{F}(X, E)$ *l'ensemble des applications de* X *dans* E*. Alors* $(\mathcal{F}(X, E), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Proposition 1.1.4 (Règles de calcul)**.**
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x, y) \in E^2$*, on a*
- $\lambda.x = 0_E \ \Leftrightarrow\ \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_E$
- $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
- $\lambda.(-x) = (-\lambda).x = -(\lambda.x)$

Démonstration.

- $\Leftarrow$ | Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, alors

$$\lambda.x = 0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x = \lambda.x + \lambda.x$$

  D'où $\lambda.x = 0_E$. De même, si $x = 0_E$, alors

$$\lambda.x = \lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.x + \lambda.x$$

  Ce qui donne $\lambda.x = 0_E$.

  $\Rightarrow$ | Inversement, on suppose que $\lambda.x = 0_E$.

  Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$, on obtient le résultat voulu. Supposons que $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$. Dans ce cas, λ est inversible dans $\mathbb{K}$, et

$$\lambda^{-1}.(\lambda.x) = (\lambda^{-1}.\lambda).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x$$

  Or $\lambda.x = 0_E$, donc par l'implication réciproque, on obtient

$$\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$$

  D'où $x = 0_E$, ce qui prouve l'implication directe.
- Par la condition i. de la définition 1.1.1, on a

$$\lambda.x = \lambda.(x - y + y) = \lambda.(x - y) + \lambda.y$$

  D'où $\lambda.x - \lambda.y = \lambda.(x - y)$.
- Par la condition i., on a

$$\lambda.x + \lambda.(-x) = \lambda.(x - x) = \lambda.0_E = 0_E$$

  Alors $\lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

De même, par la condition ii., on a

$$\lambda.x + (-\lambda).x = (\lambda - \lambda).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$$

Donc $(-\lambda).x = -(\lambda.x)$.

□

Définition 1.1.5 (Espace vectoriel produit). *Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $E_1 \times E_2$, muni des lois*

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$$
$$\lambda.(x + y) = (\lambda.x, \lambda.y)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut généraliser cette définition au produit cartésien de n espaces vectoriels.

Exemple 1.1.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Définition 1.1.7 (Structure d'algèbre). *On dit que $(A, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre si :*

1. *$(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;*
2. *$(A, +, \times)$ est un anneau ;*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in A^2$, $\quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$.*

Si, de plus, la loi $\times$ est commutative, on dit que $(A, +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

Exemples 1.1.8.
- *$\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.*
- *$(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.*
- *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles. Alors $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ, .)$ n'est pas une $\mathbb{R}$-algèbre : D'une part, $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$ n'est pas un anneau. D'autre part, en général, on a*

$$(\lambda.f) \circ g \neq f \circ (\lambda.g)$$

Contre-exemple : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1. *Soit F une partie non-vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F est un* **sous-espace vectoriel** *de E (en abrégé sev) si :*
- $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda.x \in F$

Remarques 1.2.2.
– *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F, muni des lois induites par celles de E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
– $\{0_E\}$ *et E sont des sous-espaces vectoriels (dits triviaux) de E.*

Exemples 1.2.3.

1. *L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*
3. *L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
4. *Soit I un intervelle non-vide de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. Alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.*

Proposition 1.2.4. *Soit F une partie de E. On a*

$$F \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F, \quad \lambda x + y \in F \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F, \quad \lambda x + y \in F \end{cases}$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 1.2.5 (Sous-algèbre)**.** *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre, et $B \subset A$. On dit que B est une* **sous-algèbre** *de A si :*
– $(B, +, .)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(A, +, .)$ *;*
– $(B, +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(A, +, \times)$

Remarques 1.2.6.

1. *Muni des lois induites par celles de $(A, +, \times, .)$, $(B, +, \times, .)$ devient une $\mathbb{K}$-algèbre.*
2. *B est une sous-algèbre de A si et seulement si :*
   i. $1_A \in B$
   ii. $\forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$
   iii. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in B, \quad \lambda x + y \in B$

Exercice 1.2.7.

1. *Montrer que l'ensemble des suites complexes bornées est une sous-algèbre de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \times, .)$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est-il une sous-algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$?*

Proposition 1.2.8. *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E. Alors $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sev de E.*

Démonstration.

- Comme $0_E \in F_i,\ \ \forall i \in I$, alors $0_E \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x, y \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, on a $x, y \in F_i$. Alors $\lambda x + y \in F_i$. Par suite, $\lambda x + y \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$, ce qui prouve que $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sev de E.

□

Définition 1.2.9. *Soit A une partie de E. On note I l'ensemble de tous les sev de E contenant A. Alors $\bigcap\limits_{F \in I} F$ est le plus petit sev (au sens de l'inclusion) qui contient A. On le note* $\mathrm{Vect}(A)$.
$\mathrm{Vect}(A)$ *est dit le sev* **engendré** *par A.*

Propriétés des sev engendrés

i. $A \subset B \ \Rightarrow\ \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$

ii. Soient $A \subset E$ et F un sev de E. On a

$$A \subset F \ \Rightarrow\ \mathrm{Vect}(A) \subset F$$

- Si A est un sev de E, alors $\mathrm{Vect}(A) = A$.

Proposition 1.2.10. *Soient F et G deux sev de E. Alors l'ensemble*

$$S = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}$$

est un sev de E. S est appelé la **somme** *des sous-espaces F et G. On le note $S = F + G$.*

Démonstration.
- Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $0_E = 0_E + 0_E \in S$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in S$. Il existe $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$ tels que

$$x = x_F + x_G, \qquad y = y_F + y_G$$

Comme F et G sont des sev de E alors $\lambda x_F + y_F \in F$, et $\lambda x_G + y_G \in G$. D'où

$$\lambda x + y = \lambda x_F + y_F + \lambda x_G + y_G \in S$$

Alors S est un sev de E.

□

Définition 1.2.11. *Soient F et G deux sev de E, et $S = F + G$.*

1. *Si $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que S est la* **somme directe** *de F et G, et on écrit $S = F \oplus G$.*
2. *On dit que F et G sont* **supplémentaires** *dans E si*

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$$

c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Exemple 1.2.12. *Les sous-espaces*

$$F = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \qquad G = \{(0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.2.13. *On note* P *l'ensemble des fonctions réelles paires, et* I *l'ensemble des fonctions impaires.*

1. *Vérifier que* P *et* I *sont des sev de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. *Montrer que* P *et* I *sont supplémentaires dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarques 1.2.14.

1. *Un sev peut admettre plus d'un supplémentaire. Par exemple :*

$$F = \{(x, 0) \ : \ x \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}, \quad H = \{(y, y) \ : y \in \mathbb{R}\}$$

   On a $\quad \mathbb{R}^2 = F \oplus G = F \oplus H.$

2. *Ne pas confondre un* **supplémentaire** *et un* **complémentaire**.

Proposition 1.2.15. *Soient* F *et* G *deux sev de* E. *Alors* F *et* G *sont supplémentaires dans* E *si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists!\, x_F \in F, \quad \exists!\, x_G \in G \ : \quad x = x_F + x_G$$

Démonstration.
$\Rightarrow$ | **Existence.** Comme $E = F \oplus G$ alors, pour tout $x \in E$, il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$.
Unicité. Soit $x \in E$. Soient $x_F, x'_F \in F$ et $x_G, x'_G \in G$ tels que

$$x = x_F + x_G = x'_F + x'_G$$

Alors $x_F - x'_F = x'_G - x_G$. Or $x_F - x'_F \in F$ et $x'_G - x_G \in G$, donc

$$x_F - x'_F = x'_G - x_G \in F \cap G$$

Comme $F \cap G = \{0_E\}$, alors $x_F - x'_F = x'_G - x_G = 0_E$. D'où $x_F = x'_F$ et $x_G = x'_G$, ce qui prouve l'unicité de x_F et x_G.
$\Leftarrow$ | Inversement, pour tout $x \in E$, on a l'existence de $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x = x_F + x_G$. Alors $E = F + G$. Soit $x \in F \cap G$. Il existe un unique $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Or, x se décompose sous la forme $x = x + 0_E$, avec $x \in F$ et $0_E \in G$. Alors l'unicité de (x_F, x_G) implique

$$x_F = x, \quad x_G = 0_E$$

De même, x s'écrit $x = 0_E + x$, avec $0_E \in F$ et $x \in G$. Donc l'unicité de (x_F, x_G) donne

$$x_F = 0_E, \quad x_G = x$$

Par suite, $x = 0_E$. Alors $F \cap G = \{0_E\}$. Ce qui prouve que $E = F \oplus G$. □

Propriétés de la somme
Soient F, G, et H des sev de E. On a

1. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.
2. Si $H \subset G$ alors $F + H \subset F + G$.
3. $\forall A, B \subset E$, on a $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ (Exercice).
   En particulier, on a $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Remarque 1.2.16. *On peut définir la somme de n sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_n$ comme suit :*

$$F_1 + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n \ : \ x_i \in F_i, \ \forall 1 \leq i \leq n \}$$

Ainsi, $S = F_1 + \cdots + F_n$ est un sev de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i. $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad F_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j = \{0_E\}$ *;*
ii. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 0_E \ \Rightarrow \ x_1 = \cdots = x_n = 0_E$.
Si les propriétés ci-dessus sont vérifiées, alors S est la somme directe des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$. On note

$$S = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Si, de plus, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, on dit que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E. Dans ce cas, on a

$$\forall x \in E, \quad \exists! \ (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} F_i, \quad x = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.3 Familles libres ou génératrices, bases

1.3.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.3.1.
– *Soient $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$. La somme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est appelée une* **combinaison linéaire** *des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ avec les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*
– *Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille de vecteurs de E (finie ou infinie). On appelle* **combinaison linéaire** *de $(u_k)_{k \in I}$ toute somme $\sum_{k \in J} \lambda_k u_k$, avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$ et J est une partie finie de I.*

Proposition 1.3.2. *Soit A une partie de E.*
– *Si $A = \emptyset$, alors* $\text{Vect}(A) = \{0_E\}$.
– *Si $A \neq \emptyset$, alors* $\text{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A.*

Démonstration.

– $\{0_E\}$ est le plus petit sev contenant $\emptyset$. Alors $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
– On suppose que $A \neq \emptyset$. Donc il existe $x_A \in E$ tel que $x_A \in A$. Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires de A. Alors $A \subset F$, et :
  i. $0_{\mathbb{K}}.x_A = 0_E \in F$;
  ii. $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$.
  Ce qui prouve que F est un sev de E contenant A. Par suite, $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
  Inversement, Soit $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ une combinaison linéaire des vecteurs de A, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Vect}(A)$, d'où $F \subset \mathrm{Vect}(A)$. Par conséquent, $F = \mathrm{Vect}(A)$.

$\square$

Exemple 1.3.3. *Si $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ alors*

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \mid (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

En particulier, pour $n = 1$, on a

$$\mathrm{Vect}(u_1) = \mathbb{K}u_1 = \{\lambda u_1 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Le sev $\mathbb{K}u_1$ s'appelle une droite vectorielle.
Pour $n = 2$, on a

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathbb{K}u_1 + \mathbb{K}u_2 = \{\lambda u_1 + \mu u_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

Le sev $\mathbb{K}u_1 + \mathbb{K}u_2$ s'appelle un plan vectoriel.

1.3.2 Familles libres

Définition 1.3.4.
– *Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{B}$ est* **libre** *si, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E \implies \forall 1 \leq k \leq n,\ \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

– *Soit $\mathcal{B} = (u_k)_{k \in I}$ une famille quelconque. On dit que $\mathcal{B}$ est* **libre** *si, pour tout $J \subset I$ fini, et pour tous $\lambda_k \in \mathbb{K}$, avec $k \in J$, on a*

$$\sum_{k \in J} \lambda_k u_k = 0_E \implies \forall k \in J,\ \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $\mathcal{B}$ est **liée***.*

Exemples 1.3.5.

– *Dans $\mathbb{R}^2$, on note $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est libre.*
  Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), on note $e_i = (\delta_{ik})_{1\leq k\leq n}$. Alors la famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre.
– *Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,-1)$, et $u_3 = (0,0,1)$. Alors la famille (u_1, u_2, u_3) est liée. En effet, en choisissant $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, et $\lambda_3 = -2$, on a*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E \quad \textit{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$$

– *Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.*

Remarques 1.3.6.

1. *(x) est liée si et seulement si $x = 0_E$.*
2. *Toute famille qui contient au moins un vecteur nul est liée.*
3. *(x, y) est liée si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.*
4. *Si $\mathcal{B}$ est libre (resp. liée), alors toute sous-famille (resp. sur-famille) de $\mathcal{B}$ est libre (resp. liée). En particulier, l'ensemble vide $\emptyset$ est une famille libre.*
5. *Si $\mathcal{B}$ est une famille libre, on dit que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont* **linéairement indépendants***.*

Exercice 1.3.7.

1. *Soit $a \in \mathbb{K}$. On note $P_k = (X-a)^k \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.*
2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On note $E = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $f_n \in E$ comme suit*

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in I.$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
3. *Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de E, telle que $v_k \neq 0_E$, $\forall 1 \leq k \leq n$. Montrer que $\mathcal{B}$ est libre si et seulement si la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{K}v_k$ est directe.*

1.3.3 Familles génératrices

Définition 1.3.8. *On dit qu'une famille $\mathcal{B} = (u_k)_{k\in I}$ est* **génératrice***, ou que les vecteurs de $\mathcal{B}$* **engendrent** *l'espace E si*

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$$

Ce qui équivaut à

$$\forall x \in E,\ \exists J \subset I \textit{ fini },\exists (\lambda_k)_{k\in J}\ :\ x = \sum_{k\in J} \lambda_k u_k$$

En particulier, lorsque $\mathcal{B} = (u_k)_{1\leq k\leq n}$ est finie, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n}\ :\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

Exemples 1.3.9.

- *Dans* $\mathbb{R}^2$, *on note* $e_1 = (1, 0)$ *et* $e_2 = (0, 1)$. *Alors la famille* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *est génératrice.*
  Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 2$*), la famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, *où* $e_i = (\delta_{ik})_{1\leq k\leq n}$, *est génératrice.*
- *La famille* $(1; i)$ *est génératrice du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.
- *On note* $v_1 = (1; 1)$ *et* $v_2 = (1; -1)$. *Alors la famille* $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
  En effet, Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On a*

  $$(x, y) = \frac{x + y}{2} v_1 + \frac{x - y}{2} v_2$$

  D'où $(x, y) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.
- *Dans* $\mathbb{K}[X]$, *la famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est génératrice.*

Remarques 1.3.10.

1. *Soit* F *un sev de* E. *On dit qu'une famille* $\mathcal{B}$ *est* **génératrice de** F *si*

   $$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = F$$

2. *En particulier,* $\emptyset$ *est une famille génératrice de* $\{0_E\}$, *car* $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Exercice 1.3.11.

1. *On note*

   $$v_1 = (1; 1; 1); \quad v_2 = (1; -1; 1); \quad v_3 = (1; 1; -1)$$

   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 7y - z = 0\}$.
   Déterminer une famille génératrice de F.
3. *Soient les vecteurs*

   $$u_1 = (3; 2; -1), \quad u_2 = (1; 1; 0), \quad v_1 = (2; 1; -1), \quad v_2 = (0; 1; 1)$$

   Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 1.3.12.

1. *Soit* $a \in \mathbb{C}$. *On note* $P_k = (X - a)^k$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *Montrer que la famille* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est génératrice de* $\mathbb{C}[X]$.
2. *Répondre à la question 1. pour* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif quelconque.*

1.3.4 Bases

Définition 1.3.13. *Une famille* $\mathcal{B}$ *est dite une* **base** *de* E *si* $\mathcal{B}$ *est libre et génératrice de* E.

Exemples 1.3.14.

1. *Soit $E = \mathbb{R}^n$. On note $e_k = (\delta_{kj})_{1\leq j\leq n}$. Alors $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ est la* **base canonique** *de $\mathbb{R}^n$.*
2. *La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la* **base canonique** *de $\mathbb{K}[X]$.*
3. *La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Proposition 1.3.15. *Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \ : \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

Dans ce cas, les scalaires λ_k sont appelés les **composantes** *de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Exercice. □

1.4 Applications linéaires

1.4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.4.1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.*
On dit que f est une **application linéaire** *si, pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*
– $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *(Additivité)*
– $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *(Homogénéité)*

Notations et terminologie
– L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
– Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme** de E. L'ensemble $\mathscr{L}(E, E)$ est noté $\mathscr{L}(E)$.
– Une application linéaire bijective est dite un **isomorphisme** de E dans F.
– Un endomorphisme de E bijectif est appelé un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Exemples 1.4.2.

1. *L'application nulle θ_E et l'application Identité Id_E sont des endomorphismes de E.*
2. *L'application $z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire dans $\mathbb{C}$, mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.*
3. *L'application $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.*
4. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application*
$$\begin{array}{rcl} h_\lambda : E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$
est un endomorphisme. h_λ est appelée **l'homothétie** *de rapport λ. Si, de plus, $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors h_λ est un automorphisme et $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$.*

Remarques 1.4.3.

– *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $f : (E,+) \to (F,+)$ est un morphisme de groupes. Il s'ensuit que*

$$f(0_E) = 0_F$$

– *Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si*

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

– *Plus généralement, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors, pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Exercice 1.4.4. *Déterminer tous les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.*

Définition 1.4.5. *Si $F = \mathbb{K}$, alors toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est dite une* **forme linéaire** *sur E.*
L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé le **dual** *de E, et est noté E^*.*

Exemples 1.4.6.

1. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \end{array}$$

   est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné, et $E = \mathscr{C}(I)$ l'espace des fonctions continues sur I. Alors l'application*

$$\varphi : f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

   est une forme linéaire sur E.

3. *On note $E = \mathscr{C}^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur I. Soit $a \in I$. Alors les applications*

$$f \mapsto f(a), \qquad f \mapsto f'(a)$$

   sont des formes linéaires sur E.

1.4.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 1.4.7. *Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors les applications $f+g$ et $\alpha.f$ sont linéaires.*
$(\mathscr{L}(E,F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.4.8. *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 1.4.9. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors les applications*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Psi : \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

sont linéaires.

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 1.4.10. $(\mathscr{L}(E), +, \circ, .)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre (non-commutative en général).*

Remarque 1.4.11. *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note*

$$f^n = \begin{cases} \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\,\textit{fois}} & \textit{si } n \geq 1 \\ \mathrm{Id}_E & \textit{si } n = 0 \end{cases}$$

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Si $f \circ g = g \circ f$ alors

$$(f+g)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^k \circ g^{n-k}$$

Proposition 1.4.12. *Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

Démonstration. Soient $x, y \in F$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme f est bijective, alors

$$\exists!(x_0, y_0) \in E^2 \ : \quad x = f(x_0), \quad y = f(y_0)$$

C'est-à-dire $x_0 = f^{-1}(x), \quad y_0 = f^{-1}(y)$. Par suite

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + y) &= f^{-1}(\lambda f(x_0) + f(y_0)) \\ &= f^{-1}(f(\lambda x_0 + y_0)) \\ &= \lambda x_0 + y_0 \\ &= \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f^{-1} est linéaire. □

Corollaire 1.4.13. *Soit* $\mathrm{GL}(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*. Alors* $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe (non-commutatif en général), appelé le* **groupe général linéaire** *de* E*.*

Démonstration. On note $(\mathscr{B}(E), \circ)$ le groupe des bijections de E dans lui-même. Il suffit alors de vérifier que $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{B}(E), \circ)$.
– $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$. Donc $\mathrm{GL}(E) \neq \emptyset$.
– Soient $f, g \in \mathrm{GL}(E)$. Par la proposition 1.4.12, $g^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$. D'où $f \circ g^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.
Par conséquent, $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{B}(E), \circ)$. □

1.4.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.4.14. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E, F)$*.*
– *Le* **noyau** *de* f *est défini par :*

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \ : \ f(x) = 0_F\}$$

– *L'***image** *de* f *est définie par :*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \ : \ \exists x \in E, \ y = f(x)\}$$

Proposition 1.4.15. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E, F)$*. Alors*
– *L'image par* f *de tout sev de* E *est un sev de* F*.*
– *L'image réciproque par* f *de tout sev de* F *est un sev de* E*.*

Démonstration.
– Soit H un sev de E. Montrons que $f(H)$ est un sev de F.
D'abord, $0_E \in H$, donc $f(0_E) = 0_F \in f(H)$.
Soient $x, y \in f(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $a, b \in H$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Or $\lambda a + b \in H$.
Donc $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) \in f(H)$. D'où $\lambda x + y \in H$.
– Soit G un sev de F. Montrons que $f^{-1}(G)$ est un sev de E.
Comme $0_F \in G$ et $f(0_E) = 0_F$, alors $0_E \in f^{-1}(G)$.
Soient $x, y \in f^{-1}(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f(x), f(y) \in G$. D'où $\lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in G$.
Il s'ensuit que $\lambda x + y \in f^{-1}(G)$.

□

Corollaire 1.4.16. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E, F)$*. Alors* $\ker(f)$ *est un sev de* E*, et* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sev de* F*.*

Proposition 1.4.17. *Soit* $f \in \mathscr{L}(E, F)$*. Alors* f *est injective si et seulement si* $\ker(f) = \{0_E\}$*.*

Démonstration. Voir le module Algèbre II. (Remarquer que $f : (E, +) \to (F, +)$ est un morphisme de groupes). □

Remarque 1.4.18. $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.4.4 Familles de vecteurs et applications linéaires

Proposition 1.4.19. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Si $\mathcal{F}$ est liée, alors $f(\mathcal{F})$ est liée (la réciproque est fausse en général).*

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 1.4.20. *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si l'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F.*

Démonstration.
$\Rightarrow$ | On suppose que f est injective. Soit $\mathcal{L} = (x_k)_{k\in I}$ une famille libre de E. Montrons que $f(\mathcal{L}) = (f(x_k))_{k\in I}$ est libre. Pour ce faire, soient J une partie non-vide finie de I, et $(\lambda_k)_{k\in J} \in \mathbb{K}^J$ tels que $\sum_{k\in J} \lambda_k f(x_k) = 0_F$. Alors $f\left(\sum_{k\in J} \lambda_k x_k\right) = 0_F$. Par l'injectivité de f, on obtient $\sum_{k\in J} \lambda_k x_k = 0_E$. La famille $\mathcal{L}$ étant libre, on déduit que $\lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$, $\forall k \in J$. Par conséquent, $f(\mathcal{L}) = (f(x_k))_{k\in I}$ est libre.
$\Leftarrow$ | Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Alors la famille (x) est libre, d'où $(f(x))$ est libre. Ce qui signifie que $f(x) \neq 0_F$. Donc $x \notin \ker(f)$, montrant ainsi que $\ker(f) = \{0_E\}$. Donc f est injective. $\square$

Proposition 1.4.21. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}$ une famille de vecteurs de E. Alors*

$$f(\mathrm{Vect}(\mathcal{L})) = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{L}))$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Corollaire 1.4.22. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}$ une famille génératrice de E. Alors f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{L})$ est une famille génératrice de F.*

Démonstration.
$\Rightarrow$ | On suppose que f est surjective. Soit $y \in F$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. La famille $\mathcal{L}$ étant génératrice de E, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{L}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. D'où

$$y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Par suite, $y \in \mathrm{Vect}(f(\mathcal{L}))$. Alors $f(\mathcal{L})$ est une famille génératrice de F.
$\Leftarrow$ | Par la proposition 1.4.21, on a

$$f(\mathrm{Vect}(\mathcal{L})) = \mathrm{Vect}(f(\mathcal{L}))$$

Or, $\mathcal{L}$ et $f(\mathcal{L})$ sont des familles génératrices de E et F respectivement, donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}) = E$ et $\mathrm{Vect}(f(\mathcal{L})) = F$. D'où $f(E) = F$. Ce qui montre que f est surjective. □

Corollaire 1.4.23. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.*

Démonstration. Exercice. □

1.4.5 Projections et symétries vectorielles

Définition 1.4.24. *Soient F et G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$.*

– *L'application*

$$\begin{array}{rcl} p : F \oplus G & \to & E \\ a + b & \mapsto & a \end{array}$$

est dite la **projection** *sur F parallèlement à G.*

– *L'application*

$$\begin{array}{rcl} s : F \oplus G & \to & E \\ a + b & \mapsto & a - b \end{array}$$

est dite la **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G.*

Propriétés de p et s

1. $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p^2 = p$.
2. $\ker(p) = G$ et $\mathrm{Im}(f) = f$.
3. $p \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $G = \{0_E\}$.
4. $s \circ s = s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc $s \in \mathrm{GL}(E)$.

Définition 1.4.25. *On appelle* **projecteur** *tout endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.*

Proposition 1.4.26. *Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Alors*

$$\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$$

Ainsi, p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Démonstration. Soit $x \in E$. On a $x = p(x) + (x - p(x))$, où $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. De plus, on a

$$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0_E$$

Alors $x - p(x) \in \ker(p)$. D'où $x \in \mathrm{Im}(p) + \ker(p)$. Par suite, $E = \mathrm{Im}(p) + \ker(p)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$. Alors $p(x) = 0_E$, et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. D'où

$$p \circ p(y) = p(x) = 0_E$$

Or $p \circ p = p$, ce qui implique $p \circ p(y) = p(y) = x$. Donc $x = 0_E$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$, ce qui donne $\mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p) = E$. $\square$

Exercice 1.4.27. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On pose*

$$F_1 = \{x \in E \ : \ s(x) = x\} \ ; \qquad F_2 = \{x \in E \ : \ s(x) = -x\}$$

1. *Montrer que F_1 et F_2 sont des sev de E.*
2. *Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$.*